

গণিত
দ্বাদশ শ্রেণি

ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক

1. সমাধান করো : $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}, (x > 0)$

উঃ সমাধান:

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$$

বা, $\tan^{-1} \frac{(x+1) + (x-1)}{1 - (x+1)(x-1)} = \tan^{-1} \frac{8}{31}$

বা, $\tan^{-1} \frac{2x}{1 - (x^2 - 1)} = \tan^{-1} \frac{8}{31}$

$\therefore \frac{2x}{2 - x^2} = \frac{8}{31}$

বা, $\frac{x}{2 - x^2} = \frac{4}{31}$

বা, $31x = 8 - 4x^2$

বা, $4x^2 + 31x - 8 = 0$

বা, $4x^2 + 32x - x - 8 = 0$

বা, $4x(x+8) - 1(x+8) = 0$

বা, $(x+8)(4x-1) = 0$

$\therefore x = -8, \frac{1}{4}$

$\therefore x > 0 \quad \therefore x \neq -8 \quad \therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{4}$

2. যদি $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ এবং $x + y + z = \sqrt{3}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে, $x = y = z$.

উঃ সমাধান: $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}z$

বা, $\tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}z$

$$\text{বা, } \frac{x+y}{1-xy} = \tan\left(\frac{\Pi}{2} - \tan^{-1}z\right)$$

$$\text{বা, } \frac{x+y}{1-xy} = \cot(\tan^{-1}z)$$

$$\text{বা, } \frac{x+y}{1-xy} = \cot(\cot^{-1}\frac{1}{z})$$

$$\text{বা, } \frac{x+y}{1-xy} = \frac{1}{z}$$

$$\text{বা, } xy + yz + zx = 1$$

$$\text{আবার, } x + y + z = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 3$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 3(xy + yz + zx) \quad \because xy + yz + zx = 1$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$\text{বা, } (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

\therefore তিনটি বাস্তব পূর্ণবর্গ সংখ্যামালার সমষ্টি শূন্য

\therefore প্রত্যেকটির মান পৃথকভাবে শূন্য

$$\therefore x - y = 0, y - z = 0 \text{ এবং } z - x = 0$$

$$\therefore x = y, y = z \text{ এবং } z = x$$

$$\therefore x = y = z \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$3. \text{ সমাধান করো : } \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\Pi}{4}$$

উঃ সমাধান:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\Pi}{4}$$

$$\text{বা, } \tan^{-1}\frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2}} = \frac{\Pi}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + x - 2 + x^2 - x - 2}{x^2 - 4 - (x^2 - 1)} = \tan\frac{\Pi}{4} = 1$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 4 = -3$$

$$\text{বা, } 2x^2 = 1$$

$$\text{বা, } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. সমাধান করো : $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\Pi}{4}$.

উঃ সমাধান:

$$\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\Pi}{4}$$

বা, $\tan^{-1} \frac{2x+3x}{1-2x.3x} = \frac{\Pi}{4}$

বা, $\frac{5x}{1-6x^2} = \tan \frac{\Pi}{4} = 1$

বা, $5x = 1 - 6x^2$

বা, $6x^2 + 5x - 1 = 0$

বা, $(x+1)(6x-1) = 0$

$\therefore x = -1, \frac{1}{6}$

$\therefore x = -1$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না,

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{6}$